Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 1 , Abgabe: 26.04.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Lösen Sie die Aufgaben:

(a) $y' = \sqrt{1-y^2} \quad , \quad y(0) = 0$

(b) $y' = xy + 1 \quad , \quad y(0) = 1$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2} \ , \ y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right) \ .$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie:

(a) Ein Runge - Kutta - Verfahren ist konsistent von der Ordnung 1, wenn

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$$

ist.

(b) Gilt zusätzlich

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \gamma_j = \frac{1}{2} \qquad (\alpha_1 = 0) \ ,$$

so ist es sogar konsistent von der Ordnung 2.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm RK$(f, x_0, y_0, \overline{x}, h)$, welches die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y) \ , \quad y(x_0) = y_0$$

im Intervall $[x_0, \overline{x}]$ mit der Schrittweite h mit Hilfe des Standard - Runge - Kutta - Verfahrens löst.

Erproben Sie das Programm für die Anfangswertaufgabe $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ mit $h = 0.1$.

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 2 , Abgabe: 3.5.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie die Formel

$$\nabla^q y_k = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu \binom{q}{\nu} y_{k-\nu} \ , \quad q = 0, 1, \dots$$

durch vollständige Induktion.

(b) Sei $x_k = hk$, $k \in \mathbb{Z}$, und $h > 0$.

Zeigen Sie:

$$\nabla^q y_k = q! h^q [y_{k-q}, \dots, y_k] \ .$$

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Man bestimme α, β in dem Mehrschrittverfahren

$$y_{k+3} - y_k + \alpha(y_{k+2} - y_{k+1}) = h\beta(f_{k+2} + f_{k+1})$$

so, daß die Konsistenzordnung 4 erreicht wird. Ist das ensprechende Verfahren stabil?

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die durch Differentiation abgeleiteten m-Schrittverfahren (mindestens) die Konsistenzordnung m haben.

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)**
Schreiben Sie ein Programm $AB(f, x_0, y_0, \overline{x}, h)$ zur Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ in $[x_0, \overline{x}]$ mit dem Adams-Bashforth-Verfahren mit $m = 3$. Verwenden Sie das Programm RK aus Aufgabe 4 zur Anlaufrechnung. Erproben Sie Ihr Programm an Hand des Beispiels aus Aufgabe 1a).

Prof. Dr. F. Natterer SS 2005

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 3 , Abgabe: 10.05.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 9: (2 Punkte)
Zeigen Sie: Unter den 2-Schrittverfahren

$$y_{k+2} + \alpha y_{k+1} + y_k = h(\beta_2 f_{k+2} + \beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k)$$

gibt es keines, das stabil und konsistent ist.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß das Verfahren

$$y_{k+4} - y_k = h\left(4f_{k+2} + \frac{8}{3}\nabla^2 f_{k+3} + \frac{14}{45}\nabla^4 f_{k+4}\right)$$

optimal ist.

Aufgabe 11: (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Das durch Differentiation gewonnene m-Schrittverfahren lautet für $\ell = m$:

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu}\nabla^{\nu} y_{k+m} = hf_{k+m} \ .$$

(b) Geben Sie für dieses Verfahren das Polynom ρ an und zeigen Sie Stabilität für $m \leq 4$.

Aufgabe 12: (Programmieraufgabe, 4 Punkte)
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe aus Aufgabe 4 mit einer geeigneten Runge-Kutta-Routine aus der Matlab-Bibliothek. Eine Dokumentation finden Sie in der Matlab-Hilfe.

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 4 , Abgabe: 24.05.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 13: (4 Punkte)

a) Sei A eine reelle, diagonalisierbare $(n,n)-$Matrix mit den reellen Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ und den l.u. Eigenvektoren $c_1,\ldots,c_n$. Für $i=1,\ldots,n$ sei $y_i(x)=c_i e^{\lambda_i x}$. Zeigen Sie, dass jede Linearkombination $\sum \alpha_i y_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, eine Lösung des Systems $y'=Ay$ ist und geben Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe $y'=Ay$, $y(0)=y_0$ an.

b) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei J die $(n,n)-$Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe $y'=Jy$, $y(0)=y_0$.
Hinweis: Machen Sie für die k-te Komponente der Lösung den Ansatz $y_k(x) = p_k(x)e^{\lambda x}$, $p_k \in \mathcal{P}_{n-k}$.

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Seien $q, f_1, f_2 \in C[a,b]$, $q<0$ und $f_1 \le f_2$ in $[a,b]$. Zeigen Sie, dass für die Lösungen y_1, y_2 der Randwertaufgabe

$$y_i'' + q(x)y_i = f_i(x) \quad , \quad a \le x \le b$$
$$y(a) = y(b) = 0$$

$y_1 \ge y_2$ gilt.

Aufgabe 15: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2\ , \quad y(0) = 0$$

mit Hilfe des Mehrschrittverfahrens

$$y_{k+2} - (1+a)y_{k+1} + a y_k = \frac{h}{2}\left((3-a)f_{k+1} - (1+a)f_k\right)$$

und den (exakten) Startwerten $\overline{y}_0 = 0$, $\overline{y}_1 = \tan h$. Wählen Sie einmal $a=1$, dann $a=-5$. Rechnen Sie mit der Schrittweite $h=0.01$.

Aufgabe 16: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem für das restringierte 3-Körper-Problem

$$\begin{aligned} x(0) &= 1.2 & \qquad y(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 & \qquad \dot{y}(0) &= -1.0493575098 \end{aligned}$$

und $\mu = 1/82.45$ mit dem Standard-Runge-Kutta-Verfahren. Bestätigen Sie, dass es eine Lösung der Periode $T = 6.1921693314$ gibt.

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 5 , Abgabe: 31.05.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 17: (4 Punkte)

a) Eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ heißt homogen vom Grade α, wenn
$$u(tx) = t^\alpha u(x) \,, \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+$$
gilt.
Zeigen Sie: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ist genau dann homogen vom Grade α, wenn
$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha u \,.$$

b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe
$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,,$$
$u = f(x)$ auf dem Kreis um den Ursprung vom Radius 1. Setzen Sie hinreichende Regularität von u und f voraus.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(a) Zeigen Sie: u ist genau dann eine radiale Funktion (d.h. $u(x)$ hängt nur von $x_1^2 + x_2^2$ ab), wenn
$$x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 0 \,.$$

(b) Leiten Sie eine entsprechende Differentialgleichung her für Funktionen u, welche entlang der Ellipsen $(x_1 - m_1)^2/a^2 + (x_2 - m_2)^2/b^2 = 1$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ fest, $a = kb$, $\quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, konstant sind.

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^1)$ beliebig.
Zeigen Sie: Erfüllt $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ die Beziehung
$$x_2 = \frac{1}{3} u^3 + f(u - x_1) \,,$$
so ist u Lösung der Differentialgleichung
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1 \,.$$

Aufgabe 20: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)** Lösen Sie die Aufgabe
$$y'' = \frac{3}{2} y^2 \,, \quad y(0) = 4 \,, \quad y(1) = 1$$
mit Hilfe des Schießverfahrens und Ihres Programms für das Runge-Kutta-Verfahren. Aus der Vorlesung wissen Sie, daß es Lösungen mit $y'(0) = s$ gibt für $s \sim -8, -35.8$.

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 6 , Abgabe: 07.06.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Lösen Sie mit der in der Vorlesung angegebenen Methode das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 &= 1, \quad |x| > 1, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ u &= 0, \quad |x| = 1. \end{aligned}$$

Wieviel Lösungen gibt es?

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Sei $x = x(t)$, $u = u(t)$, $p = p(t)$ eine Charakteristik von $F(x,u,p) = 0$. Zeigen Sie: $F(x(t), u(t), p(t))$ ist konstant.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die Anfangswertaufgabe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ in } \mathbb{R}^1 \times (0,\infty)$$

$$u(x,0) = f(x)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

besitzt die Lösung

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} g(y)dy\ .$$

Aufgabe 24: (Programmieraufgabe, 4 Punkte)
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ in } (0,1) \times (0,\infty) \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ &u(x,0) = 1/2 - |x - 1/2| \end{aligned}$$

im Intervall $(0,1)\times(0,1)$ durch das Differenzenverfahren mit $\lambda = 1/2$, $\lambda = 1$ und $h = 0.01$.

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 7 , Abgabe: 14.06.05 , 11.00 Uhr

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei u die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , \quad 0 \leq x \leq 1 \ , \ t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= f(x) \qquad , \quad 0 \leq x \leq 1 \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für alle $t \geq 0$ gilt

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 f(x)dx \ .$$

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei u_{kl} nach dem einfachsten Differenzenverfahren für die Aufgabe 25 berechnet. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n} u_{kl}$$

ist unabhängig von l.

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe von Fourierreihen die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , \quad 0 \leq x \leq \pi \ , \ t \geq 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) &= x(\pi - x) \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \ . \end{aligned}$$

Stellen Sie die Lösung graphisch dar.

Aufgabe 28: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Lösen Sie die Aufgabe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^1 \ , \ \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

mit dem einfachsten Differenzenverfahren für $f(x) = e^{-|x|}$ und vergleichen Sie das Resultat mit der exakten Lösung nach Aufgabe 23.

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 8 , Abgabe: 21.06.05 , 11.00 Uhr

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Abminderungsfaktoren für die stückweise lineare Interpolation.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Seien $y, \tilde{y} \in \mathbb{C}^{n-1}, \tilde{y}_j = \sum_{k=1}^{n-1} y_k \sin(\pi kj/n)$. $\tilde{y}$ heißt Sinustransformation von y. Berechnen Sie ihre Inverse.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Leiten Sie einen schnellen Algorithmus zur Berechnung der Sinustransformation her, der mit $O(n \log n)$ Operationen auskommt.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Implementieren Sie den Algorithmus aus Aufg. 31. Hinweis: Matlab besitzt eine Funktion *dst*, mit der Sie Ihre Funktion testen können.

Wenden Sie Ihr Programm wie folgt an:

a) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{M} a_k \sin(kx_j), x_j = 2\pi j/N, j = 1, \ldots, N-1$, für M=32 und N=512. Wählen Sie als a_k die Fourierkoeffizienten der Signumfunktion der Vorlesung.

b) Multiplizieren Sie die a_k mit den Abminderungsfaktoren aus Aufg. 29 und denen der Vorlesung, und berechnen Sie wiederum die Reihe.

Stellen Sie das Ergebnis jeweils graphisch dar.

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 9 , Abgabe: 28.06.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Für die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu \ , \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

werde das Differenzenverfahren

$$\frac{u_{k,\ell+1} - u_{k,\ell}}{\Delta t} = a\frac{u_{k+1,\ell} - 2u_{k,\ell} + u_{k-1,\ell}}{h^2} + b\frac{u_{k+1,\ell} - u_{k-1,\ell}}{2h} + cu_{k,\ell}$$

durchgeführt. Berechnen Sie die Amplifikationsmatrix und zeigen Sie, daß das Verfahren für $\lambda > 1/2$ instabil ist ($\lambda = a\Delta t/h^2$).

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Sei u die Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Es ist $u \geq 0$ in Ω.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante C, so daß für alle $v \in C^\infty(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} v^2 ds \leq C \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega v^2 dx \right) \ .$$

Aufgabe 36: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)**
Lösen Sie die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

für $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1 - x_1\}$ durch das einfachste Differenzenverfahren. Wählen Sie $h = 0.01$ und lösen Sie das diskrete System durch das SOR-Verfahren mit $\omega = 1$, 1.2, 1.4, 1.6 und 1.8.

Welches ω liefert die schnellste Konvergenz?

Übungen zur Vorlesung Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 10 , Abgabe: 05.07.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Berechnen Sie die schwachen Ableitungen 1. Ordnung der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ (falls sie existieren):

a) $$f(x) = \begin{cases} 1 - |x_1| - |x_2|, & |x_1| + |x_2| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} 1 - x_1^2 - x_2^2, & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 38: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und mit $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\sigma \in C^\infty(\partial\Omega)$ sei

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \sigma uv\, ds \\ F(v) &= \int_\Omega fv dx\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Ist $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ Lösung von

$$a(u,v) = F(v)\,, \quad \forall\, v \in C^\infty(\bar{\Omega})\,,$$

so ist u Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u = f \quad & \text{in} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0 \quad & \text{auf} \quad \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

wobei ν die äußere Normale auf $\partial\Omega$ ist.

Aufgabe 39: (4 Punkte)
Sei a eine Bilinearform auf dem Hilbertraum V und F ein lineares Funktional auf V. Sei $u \in V$ Lösung der Variationsgleichung $a(u,v) = F(v)$, $\forall\, v \in V$. a sei symmetrisch und V-elliptisch. Zeigen Sie: u minimiert

$$\frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$$

auf V.

Aufgabe 40: (4 Punkte)
Seien $q, f \in C[a,b]$ und $q > 0$ in $[a,b]$. Zeigen Sie: Die Lösung y_0 von

$$-y_0'' + qy_0 = f \quad , \quad a \leq x \leq b$$

$$y_0(a) = y_0(b) = 0$$

minimiert

$$\int_a^b (y'^2 + qy^2 - 2fy)dx$$

für alle $y \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$ mit $y(a) = y(b) = 0$.